

## Correction SIGMA n°1

**Exercice 1 - Inspiré ESLSCA-ISC 99**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**A) Étude de la suite  $u$ .**

1. Étude de  $f$ .

(a) On résout l'inéquation

$$1 + x \geq 0 \iff x \geq -1.$$

Donc le domaine de définition de  $f$  est  $D_f = [-1; +\infty[$ .

(b) Pour la dérivabilité, on résout l'inéquation

$$1 + x > 0 \iff x > -1.$$

La fonction  $f$  est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur  $] -1; +\infty[$  et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0$$

(c) On a  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{1+x}{2} = 0$  et  $\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ >}} \sqrt{X} = 0$  donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} = 0.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2} = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$  donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ >}} \sqrt{\frac{1+x}{2}} = +\infty.$$

(d) La dérivée de  $f$  est strictement positive, la fonction est donc strictement croissante.

$x$	$-1$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de $f$	$0 \nearrow +\infty$	

(e) On résout l'équation sur  $] - 1; +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \\ &\implies \frac{1+x}{2} = x^2 \\ &\implies 1+x = 2x^2 \\ &\implies 2x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant d'une telle équation est  $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$ . L'équation a donc 2 solutions

$$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$$

On vérifie alors ces solutions :

$$\sqrt{\frac{1-1/2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

et

$$\sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$$

Donc, on conclut que

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \{1\}}$$

On résout maintenant l'inéquation  $f(x) > x$ . On raisonne par disjonction de cas. Si  $x \in ] - 1, 0[$ , l'inégalité est toujours vraie car une racine carrée est toujours positive.

On résout maintenant l'inéquation pour  $x \in [0; +\infty[$ . Dans ce cas (comme la fonction  $x \rightarrow x^2$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f(x) > x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}} > x \\ &\iff \frac{1+x}{2} > x^2 \\ &\iff 1+x > 2x^2 \\ &\iff 2x^2 - x - 1 < 0 \end{aligned}$$

Or on sait que  $2x^2 - x - 1$  est positif pour  $x \in ] - \infty; -1/2[ \cup ] 1; +\infty[$ .

$$\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est } \mathcal{S} = ] - 1; 1[}$$

(f) Tracer la courbe représentative de  $f$  et la droite d'équation  $y = x$ .

2. Dans cette partie, on suppose que  $u_0 = 0$ .

(a) Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un entier  $n$  et qui affiche  $u_n$ .

```
u = 0
n = input("Entrez un entier n")

for k = 1:n
    u = sqrt( (1+u) / 2 )
end
disp(u)
```

(b) On montre par récurrence que  $u$  est bien définie, c'est à dire les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ existe et } u_n > 0\}$ .

- **Initialisation** :  $u_0$  vaut 0 donc  $u_0$  est bien définie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors  $u_n > 0$  et donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien définie et  $u_{n+1} > 0$ . Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.
- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n > 0}$ .

(c) On montre par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \leq 1\}$ .

- **Initialisation** :  $u_0$  vaut 0 donc  $u_0 \leq 1$ .
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} u_n \leq 1 &\iff f(u_n) \leq f(1) \\ &\iff u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est majorée par } 1}$ .

(d) On a montré précédemment que  $\forall x \in ]-1; 1], f(x) \geq x$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$  donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$$

$\boxed{\text{La suite } u \text{ est donc croissante.}}$

3. Dans cette partie, on suppose que  $u_0 > 1$ .

(a) On montre par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n > 1 \text{ et } u_n \text{ existe}\}$ .

- **Initialisation** :  $u_0 > 1$  et  $u_0$  existe donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors  $u_n > 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  existe

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\iff f(u_n) > f(1) \\ &\iff u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n > 1}$ .

(b) On a montré précédemment que  $\forall x \in ]1; +\infty[, f(x) < x$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$  donc

$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n$$

$\boxed{\text{La suite } u \text{ est donc décroissante.}}$

## B) Calcul de $u_n$ en fonction de $n$ quand $u_0 > 1$ .

On suppose désormais que  $u_0 > 1$ .

1. Étude de fonctions auxiliaires.

On définit sur  $\mathbb{R}$  les fonctions  $ch$  et  $sh$  par  $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

(a) La fonction  $ch$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée et somme de fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus

$$\boxed{ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x).}$$

De même, la fonction  $sh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que composée et somme de fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus

$$\boxed{sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x).}$$

(b) Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$  et  $e^{-x} > 0$  donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) > 0.}$$

On a enfin  $sh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$ . La fonction  $sh$  est strictement croissante et  $sh(0) = 0$ . Donc

$\boxed{\text{la fonction } sh \text{ est négative sur } \mathbb{R}^- \text{ et positive sur } \mathbb{R}^+ .}$

(c) La fonction  $ch$  est par conséquent strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

La fonction  $ch$  est également continue sur  $]0; +\infty[$ .

$ch(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = +\infty$ , Enfin  $u_0 > 1$ . D'après le théorème de la bijection,

$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha > 0 \text{ tel que } ch(\alpha) = u_0}$

2. (a) On calcule

$$\begin{aligned} 2 \left( ch \left( \frac{x}{2} \right) \right)^2 - 1 &= 2 \left( \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{2} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2} (e^{x/2} + e^{-x/2})^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2} ((e^{x/2})^2 + 2e^{x/2}e^{-x/2} + (e^{-x/2})^2) - 1 \\ &= \frac{1}{2} (e^x + 2 + e^{-x}) - 1 \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 - 1 \\ &= ch(x) \end{aligned}$$

(b) On montre par récurrence,  $\mathcal{P}_n \left\{ u_n = ch \left( \frac{\alpha}{2^n} \right) \right\}$ .

• **Initialisation** : On vérifie tout d'abord que

$$u_0 = ch \left( \frac{\alpha}{2^0} \right) = ch(\alpha) = u_0$$

donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

• **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors  $u_n = ch \left( \frac{\alpha}{2^n} \right)$ . En utilisant la formule de récurrence pour  $u$ , on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + ch \left( \frac{\alpha}{2^n} \right)}{2}} \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente,

$$ch \left( \frac{\alpha}{2^n} \right) = 2 \left( ch \left( \frac{\alpha}{2^n} \times \frac{1}{2} \right) \right)^2 - 1 = 2 \left( ch \left( \frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) \right)^2 - 1$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{\frac{1 + 2 \left( ch \left( \frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) \right)^2 - 1}{2}} \\ &= \sqrt{\left( ch \left( \frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) \right)^2} \\ &= \left| ch \left( \frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) \right| = ch \left( \frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion :**  $\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = ch \left( \frac{\alpha}{2^n} \right).$

### C) Une autre suite.

1. On a les propriétés suivantes :

- La fonction  $sh$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- La fonction  $sh$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (notamment car elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .)
- $sh(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty$ .

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{L'équation } sh(x) = n \text{ a une unique solution sur } \mathbb{R}^+.$$

2. Soit  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} sh(x) < e^x &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} < e^x \\ &\iff 0 < e^x - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \\ &\iff 0 < \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vérifiée donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad sh(x) < e^x.}$$

3. Pour tout  $x > 0$ ,  $sh(x) < e^x$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n > 0$ . Donc

$$\begin{aligned} sh(v_n) < e^{v_n} &\iff n < e^{v_n} \\ &\iff \boxed{\ln(n) < v_n} \end{aligned}$$

## Exercice 2 - Inspiré ECRICOME 2001

Dans cet exercice, on étudie les matrices de la forme suivante ( $a$  est un nombre réel) :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

## A) Des cas particuliers.

- Lorsque  $a = 0$ , les matrices  $N(0)$  et  $M(0)$  sont respectivement les matrices identités d'ordre 2 et d'ordre 3.
- Les matrices  $N(a)$  et  $M(a)$  sont symétriques.
- On s'intéresse désormais à la matrice

$$N(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Le déterminant de cette matrice est  $\det(N(1)) = 0 - 1 = -1 \neq 0$ . La matrice  $N(1)$  est inversible et

$$(N(1))^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = N(1).$$

- (b) On montre par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \left\{ (N(1))^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n & 1 + (-1)^{n+1} \\ 1 + (-1)^{n+1} & 1 + (-1)^n \end{pmatrix} \right\}$

- **Initialisation** : On a

$$(N(1))^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^0 & 1 + (-1)^{0+1} \\ 1 + (-1)^{0+1} & 1 + (-1)^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 1 & 1 + (-1) \\ 1 + (-1) & 1 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$$

- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} (N(1))^{n+1} &= (N(1))^n \times N(1) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n & 1 + (-1)^{n+1} \\ 1 + (-1)^{n+1} & 1 + (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^{n+1} & 1 + (-1)^n \\ 1 + (-1)^n & 1 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^{n+1} & 1 + (-1)^{n+2} \\ 1 + (-1)^{n+2} & 1 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(N(1))^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^n & 1 + (-1)^{n+1} \\ 1 + (-1)^{n+1} & 1 + (-1)^n \end{pmatrix}$ .

## B) Étude générale de $N(a)$

- On résout l'équation

$$\begin{aligned} (1-a)^2 - a^2 = 0 &\iff (1-a-a)(1-a+a) = 0 \\ &\iff (1-2a) = 0 \\ &\iff 2a = 1 \\ &\iff a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Cette équation a une unique solution } \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

2. Le déterminant de la matrice  $N(a)$  est  $(1-a)^2 - a^2 = 1 - 2a$ . On a vu précédemment que cette équation est différente de 0 si et seulement si  $a \neq \frac{1}{2}$ . La matrice  $N(a)$  est donc inversible si et seulement si  $a \neq \frac{1}{2}$ . Dans ce cas,

$$(N(a))^{-1} = \frac{1}{1-2a} \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$$

3. On introduit la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Le déterminant de  $P$  est  $\det(P) = 1 - (-1) = 2$ . La matrice  $P$  est inversible et donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On calcule

$$\begin{aligned} D(a) &= P^{-1}N(a)P \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-2a & 1 \\ 2a-1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-4a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned} D(a) = P^{-1}N(a)P &\iff PD(a) = PP^{-1}N(a)P \\ &\iff PD(a)P^{-1} = N(a)PP^{-1} \\ &\iff \boxed{PD(a)P^{-1} = N(a)} \end{aligned}$$

6. On montre par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{(N(a))^n = PD(a)^n P^{-1}\}$
- **Initialisation** : On a d'un côté  $(N(a))^0 = I_2$  et de l'autre  $P(D(a))^0 P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ . Donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.
  - **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} (N(a))^{n+1} &= (N(a))^n \times N(a) \\ &= P(D(a))^n P^{-1} PD(a) P^{-1} \\ &= P(D(a))^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, (N(a))^n = P(D(a))^n P^{-1}}$ .

7. On calcule pour tout  $n$  entier,

$$\begin{aligned} N(a)^n &= P(D(a))^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1-2a)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-2a)^n & 1 \\ -(1-2a)^n & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (1-2a)^n & 1 - (1-2a)^n \\ 1 - (1-2a)^n & 1 + (1-2a)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### C) Étude générale de $M(a)$

1. on a :

$$\begin{aligned} M(a).M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+4ab+2b & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a-2ab+b-2ba+ab & 1-2(a+b-3ab) & a+b-3ab \\ ab+a-2ab+b-2ba & a+b-3ab & 1-2(a+b-3ab) \end{pmatrix} \\ &= M(a+b-3ab) \end{aligned}$$

2. On cherche l'inverse de  $M(a)$  sous la forme de  $M(b)$ . Comme  $M(0) = I_3$ , il suffit d'avoir  $M(a)M(b) = M(0)$  donc

$$a+b-3ab=0 \Leftrightarrow b(1-3a)=-a \Leftrightarrow b=-\frac{a}{1-3a} \quad \text{si } a \neq 1/3$$

Donc si  $a \neq 1/3$  alors  $b = -\frac{a}{1-3a}$  est solution et donc

$$M(a) \cdot M\left(-\frac{a}{1-3a}\right) = M(0) = I_3$$

Ainsi  $M(a)$  est inversible et son inverse est :

$$\boxed{M(a)^{-1} = M\left(-\frac{a}{1-3a}\right)}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{3}\right)^2 &= M\left(\frac{1}{3}\right) M\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= M\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ &= M\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Par l'absurde, si on suppose que  $M(1/3)$  est inversible alors il existe une matrice inverse  $M(1/3)^{-1}$  et d'une part

$$M(1/3)^{-1} \times M(1/3)^2 = M(1/3)$$

et

$$M(1/3)^{-1} \times M(1/3)^2 = M(1/3)^{-1} \times M(1/3) = I_3$$

donc  $M(1/3) = I_3$ ; Or  $M(1/3) \neq I_3$ . Donc ceci est absurde.

Donc  $M(1/3)$  n'est pas inversible.

4. On a montré précédemment que  $a_0 = 1/3$  est une solution de

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

Est-ce la seule? On résout

$$\begin{aligned} [M(x)]^2 = M(x) &\Leftrightarrow M(2x - 3x^2) = M(x) \\ &\Leftrightarrow 2x - 3x^2 = x \\ &\Leftrightarrow x - 3x^2 = 0 \quad \text{polynôme} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1/3 \end{aligned}$$

Donc  $a_0 = \frac{1}{3}$  est la seule solution non nulle.

5. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I_3 - P$$

(a) On a  $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$  et

$$P + \alpha Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+2\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} M(a) = P + \alpha Q &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\alpha = 3(1-2a) \\ 1-\alpha = 3a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2-6a \\ \alpha = 1-3a \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1-3a \end{aligned}$$

Donc  $\alpha = 1 - 3a$  est l'unique nombre qui convient pour :  $M(a) = P + \alpha Q$

(b)  $P^2 = P$  d'après la définition de  $P$

On a ensuite

$$\begin{aligned} QP &= (I - P)P \\ &= P - P^2 \\ &= P - P = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ &= P(I - P) \\ &= P^2 - P \\ &= P - P = 0 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} Q^2 &= (I - P)^2 \\ &= I - P - P + P^2 \\ &= I - 2P + P \\ &= I - P = Q \end{aligned}$$

- (c) On procède par récurrence. Pour  $n = 1$ ,  $[M(a)]^1 = M(a) = P + \alpha Q$  donc  $x_1 = 1$  et  $y_1 = \alpha$  conviennent. (cela était déjà vrai pour  $n = 0$  mais l'énoncé ne le demandait qu'à partir de 1)

Soit  $n \geq 1$ . On suppose qu'il existe  $x_n$  et  $y_n$  réels tels que  $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$  alors

$$\begin{aligned} [M(a)]^{n+1} &= (x_n P + y_n Q)(P + \alpha Q) \\ &= x_n P^2 + y_n QP + \alpha x_n PQ + \alpha y_n Q^2 \\ &= x_n P + \alpha y_n Q \end{aligned}$$

Donc avec  $x_{n+1} = x_n$  et  $y_{n+1} = \alpha y_n$  qui sont bien des réels, on a

$$[M(a)]^{n+1} = x_{n+1} P + y_{n+1} Q$$

- (d) La suite  $x$  est constante donc égale à  $x_1 = 1$  et  $y$  est géométrique de raison  $\alpha$  donc

$$y_n = \alpha^{n-1} y_1 = \alpha^n$$

donc pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $[M(a)]^n = P + \alpha^n Q$ . Montrer alors que

$$[M(a)]^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2a^n & 1 - a^n & 1 - a^n \\ 1 - a^n & 1 + 2a^n & 1 - a^n \\ 1 - a^n & 1 - a^n & 1 + 2a^n \end{pmatrix}$$

### Exercice 3 - Probabilités

On considère une roue de loterie composée de 12 secteurs, numérotés de 1 à 12. Un croupier fait tourner cette roue devant un repère et on considère qu'à chaque lancer, chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

Un joueur choisit à chaque partie un ou plusieurs numéros parmi les 12. Il est gagnant si l'un des numéros choisis apparaît à l'arrêt de la roue.

Le joueur adopte la tactique suivante :

- il mise sur un seul numéro lors de la première partie,
- s'il perd à la  $n$ -ème partie ( $n \geq 1$ ), il mise sur 2 numéros à la partie suivante ; s'il gagne à la  $n$ -ème partie, il mise sur 3 numéros à la partie suivante.

1. Lors de la première partie, il mise sur un seul numéro.

$$\text{Donc } p_1 = \frac{1}{12}$$

$\{A_1, \overline{A_1}\}$  est un système complet d'événements fini donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 &= P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{2}{12} \\ &= \frac{3}{144} + \frac{22}{144} \\ &= \frac{25}{144} \end{aligned}$$

2. On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$  : "le joueur gagne la  $n$ -ème partie.

- (a) Si le joueur gagne la  $n$ -ème partie il mise sur 3 numéros donc  $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ .  
Sinon, il mise sur 2 numéros donc  $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}}$$

$\{A_n, \overline{A_n}\}$  est un système complet d'événements fini donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}}$$

- (b) Tout d'abord,

$$x = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6} \iff \frac{11}{12}x = \frac{1}{6} \iff x = \frac{2}{11}.$$

On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$p_{n+1} - \frac{2}{11} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12} \left(p_n - \frac{2}{11}\right).$$

$$\boxed{\left(p_n - \frac{2}{11}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{12}.$$

- (c)  $\left(p_n - \frac{2}{11}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant géométrique de raison  $\frac{1}{12}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n - \frac{2}{11} = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{2}{11}\right).$$

De plus,  $p_1 = P(A_1) = \frac{1}{12}$  d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11}\right) + \frac{2}{11} = \frac{2}{11} - \frac{13}{132} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{2}{11} - \frac{13}{132} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}}$$

3. (a)

$$\boxed{B_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right) \cap A_n.$$

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i\right) > 0$  donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(B_n) = P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-2} \overline{A}_i}(\overline{A}_{n-1})P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i}(A_n)$$

De plus, la façon de jouer ne dépend que du résultat précédent donc

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \dots P_{\overline{A}_{n-2}}(\overline{A}_{n-1})P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n) \\ &= P(\overline{A}_1) \left( \prod_{k=1}^{n-2} P_{\overline{A}_k}(\overline{A}_{k+1}) \right) P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n) \\ &= \frac{11}{12} \left( \prod_{k=1}^{n-2} \frac{5}{6} \right) \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B_n) = \frac{11}{72} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}$$

(b)  $B_1 = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^n \overline{A}_i\right)$ . De plus,  $P\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} \overline{A}_i\right)\right) > 0$  donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant l'idée du raisonnement précédent, on a :

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A}_2)P_{A_1 \cap \overline{A}_2}(\overline{A}_3) \dots P_{A_1 \cap (\bigcap_{i=2}^{n-1} \overline{A}_i)}(\overline{A}_n) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A}_2)P_{\overline{A}_2}(\overline{A}_3) \dots P_{\overline{A}_{n-1}}(\overline{A}_n) = \frac{1}{12} \frac{3}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B_1) = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}$$

(c) Soit  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ . On a  $B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A}_i\right) \cap A_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n \overline{A}_i\right)$ .

On a  $P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A}_i\right) \cap A_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} \overline{A}_i\right)\right) > 0$  donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant les raisonnements précédents, on a :

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(\overline{A}_1) \left( \prod_{i=1}^{k-2} P_{\overline{A}_i}(\overline{A}_{i+1}) \right) P_{\overline{A}_{k-1}}(A_k)P_{A_k}(\overline{A}_{k+1}) \left( \prod_{i=k+1}^{n-1} P_{\overline{A}_i}(\overline{A}_{i+1}) \right) \\ &= \frac{11}{12} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} \frac{1}{6} \frac{3}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, P(B_k) = \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}$$

(d)  $C_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$  et les  $B_k$  sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(C_n) &= \sum_{k=1}^n P(B_k) = P(B_1) + \sum_{k=2}^{n-1} P(B_k) + P(B_n) \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{16} + \frac{11}{72}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2) \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

$$P(C_n) = \frac{31}{144} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2) \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}.$$

4. **Étude Scilab.** On rappelle que la fonction `rand()` permet d'obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.

(a) L'expression `ceil(12 * rand())` permet d'obtenir un nombre entier aléatoire entre 1 et 12.

(b) Recopiez et complétez ce programme Scilab permettant de simuler la première partie (on demandera au joueur quel numéro, il choisit)

```
resultat = ceil(12*rand())
choix_joueur = ..input("Choisir un nombre entier entre 1 et 12")..
if ..choix_joueur == resultat.. then
    disp("Le joueur a gagné")
else
    disp("Le joueur a perdu")
..end..
```

## Exercice 4 - Inspiré EDHEC 2001

### Partie 1

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. On remarque que  $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{n+1}$ . On a alors le programme suivant :

```
v = 1
for k = 2:n
    v = v + 1/k
end
disp(v)
```

2. Soit  $k > 1$ . On a pour tout  $x \in [k-1; k]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} &\implies \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} \\ &\implies \frac{k - (k-1)}{k} \leq [\ln(x)]_{k-1}^k \\ &\implies \boxed{\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)} \end{aligned}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la relation de la question précédente, on a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k-1)$$

Or d'une part  $v_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$  et d'autre part on reconnaît une somme télescopique sur la somme de droite :

$$\sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(n) - \ln(2-1) = \ln(n)$$

On en déduit que

$$\boxed{v_n \leq \ln(n) + 1.}$$

## Partie 2

On considère une suite  $u$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation suivante, valable pour tout entier  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. (a) On montre par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ est positif et } u_n > 0\}$

- **Initialisation** : On a  $u_0 = 1$  donc  $u_0 > 0$ .
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors  $u_n > 0$  et  $\frac{1}{u_n} > 0$  donc  $u_{n+1}$  existe et  $u_{n+1} > 0$ .

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{u_n \text{ existe et } u_n > 0}$ .

(b) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

2. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 &= \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 \\ &= u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}}$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On prend la somme de chaque côté et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 + \frac{1}{u_k^2} \iff u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &\iff u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

(c) On a  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} > 0$  et donc  $\boxed{u_n^2 \geq 2n + 1}$ .

3. (a) D'après le résultat précédent pour tout  $k \geq 1$

$$u_k^2 \geq 2k + 1 \geq 2k \iff \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} &= \frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} v_{n-1}\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

(b) En utilisant la partie 1, on établit que

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + 1)$$

Ainsi

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$